3.3 Statistički testovi

Ako znamo realizovane vrednosti prostog slučajnog uzorka obeležja X, možemo postaviti neke pretpostavke o raspodeli obeležja X, takozvane **statističke hipoteze**. Ako se hipoteza odnosi na vrednost parametra poznatog oblika raspodele, tada je u pitanju **parametarska hipoteza**, a ako se pretpostavka odnosi na funkciju raspodele, onda je to **neparametarska hipoteza**.

Provera hipoteze se naziva **statistički test**. Kod svakog statističkog testa unapred je definisan **prag značajnosti** α, koji predstavlja najveću dozvoljenu verovatnoću greške I vrste tj. verovatnoću da smo nultu hipotezu odbacili iako je zapravo tačna.

Obradićemo nekoliko parametarskih i neparametarskih testova.

3.3.1 Parametarski testovi

Zajednička karakteristika svih parametarskih testova je da unapred znamo raspodelu obeležja, a testom proveravamo pretpostavljene vrednosti pojedinih parametara te raspodele (npr. m ili σ kod normalne raspodele, p kod binomne raspodele, itd...). Razlikujemo dve osnovne kategorije ovih testova:

- parametarske testove jednog uzorka;
- parametarske testove dva uzorka.

Kod parametarskih testova **jednog uzorka** nulta hipoteza je oblika $H_0(\theta = \theta_0)$, gde je θ nepoznati parametar raspodele obeležja, a θ_0 njegova pretpostavljena vrednost. Osnovni način provere ovakvih hipoteza je pomoću **statističkog testa značajnosti**, koji se sastoji u tome da odaberemo odgovarajuću statistiku $U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ u kojoj figuriše nepoznati parametar θ i čija raspodela nam je poznata. Uz pretpostavku da je $\theta = \theta_0$, dobićemo konkretnu vrednost statistike $U = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ako je α^*, verovatnoća odstupanja statistike U od realizovane vrednosti, manja od unapred zadatog praga značajnosti α, hipotezu odbacujemo, u protivnom je ne odbacujemo. Alternativni način provere parametarskih hipoteza jednog uzorka je pomoću **intervala poverenja**. Za zadati prag značajnosti α napravimo interval poverenja $\mathbf{I}$ za traženi parametar θ, sa nivoom poverenja $\beta = 1 - \alpha$. Ako pretpostavljena vrednost $\theta_0 \in \mathbf{I}$, nultu hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α. U protivnom je odbacujemo.

Kod parametarskih testova **dva uzorka** cilj je da utvrdimo da li dva uzorka pripadaju istoj populaciji tj. da li imaju iste vrednosti parametara raspodele. Zbog toga je nulta hipoteza oblika $H_0(\theta_1 = \theta_2)$.

I **Test jednakosti srednjih vrednosti dva uzorka sa normalnom raspodelom**

Nulta hipoteza je oblika $H_0(m_1 = m_2)$. Ovaj test se koristi samo kada se standardne devijacije mogu smatrati jednakim. Neka su n_1 i n_2 obimi uzoraka, $\bar{X}_1$ i $\bar{X}_2$ aritmetičke sredine, a $\bar{S}_1^2$ i $\bar{S}_2^2$ uzoračke disperzije. Neka je $\beta = 1 - \alpha$.

- Ako je $n_1 + n_2 \geq 30$, možemo koristiti aproksimaciju standardizovanom normalnom raspodelom. Tada pravimo statistiku

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}, \quad Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\frac{\bar{S}_1^2}{n_1} + \frac{\bar{S}_2^2}{n_2}}.$$

Hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α ako realizovana vrednost $z_0 \in (-a, a)$, gde je $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$, a u protivnom je odbacujemo.

- Ako je $n_1 + n_2 < 30$, koristitimo Studentovu raspodelu. Tada pravimo statistiku

$$T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}, \quad Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\frac{(n_1-1)\bar{S}_1^2 + (n_2-1)\bar{S}_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}.$$

Hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α ako $t_0 \in (-a, a)$, gde je $a = t_{n_1+n_2-2, \frac{1+\beta}{2}}$, a u protivnom je odbacujemo.

II **Test jednakosti proporcija dva uzorka sa binomnom raspodelom**

Nulta hipoteza je oblika $H_0(p_1 = p_2)$. Neka su n_1 i n_2 obimi uzoraka, k_1 i k_2 brojevi pozitivnih realizacija u uzorcima, a $\bar{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}$ i $\bar{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}$ realizovane uzoračke proporcije. Neka je $\beta = 1 - \alpha$. Formiramo statistiku

$$Z_0 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{Se(p_1 - p_2)}, \quad Se(p_1 - p_2) = \sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}, \;\; p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}, \;\; q = 1 - p.$$

Hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α ako $z_0 \in (-a, a)$, gde je $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$, a u protivnom je odbacujemo.

Navedeni postupci se odnose na tzv. **dvostrane** testove, u kojima je alternativna hipoteza oblika $H_1(\theta \neq \theta_0)$ tj. $H_1(\theta_1 \neq \theta_2)$. Osim ovih, postoje i tzv. **jednostrani** testovi, u kojima kao alternativu nultoj hipotezi postavljamo nepotpunu negaciju polaznog tvrđenja (npr. $H_1(\theta > \theta_0)$ ili $H_1(\theta_1 < \theta_2)$).

---

[172] *Kocka za igru je na slučajan način bačena 1000 puta. Šestica je pala 200 puta. Testirati hipotezu da je kocka ispravna sa pragom značajnosti $\alpha = 0.01$.*

Rešenje: **I način**: Pošto je verovatnoća da na ispravnoj kocki padne šestica jednaka $\frac{1}{6}$, zadatak ćemo rešiti tako što ćemo testirati hipotezu da je proporcija šestica u svim bacanjima jednak $p_0 = \frac{1}{6}$. Dakle, nulta hipoteza je $H_0(p_0 = \frac{1}{6})$, a alternativna $H_1(p_0 \neq \frac{1}{6})$. Po Moavr-Laplasovoj teoremi za slučajnu promenljivu sa Binomnom raspodelom $K : \mathcal{B}(n,p)$ važi

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{K}{n} - p_0\right| \geq \left|\frac{k}{n} - p_0\right|\right) = 2\left(1 - \phi\left(\frac{|k - np_0|}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)\right) = \alpha^* .$$

Obratiti pažnju na malo i veliko slovo k (i K) u prethodnoj formuli. K je oznaka za slučajnu promenljivu a k za realizovanu vrednost te slučajne promenljive, u ovom slučaju ceo broj. Imamo

$$\alpha^* = 2\left(1 - \phi\left(\frac{|200 - 1000 \cdot \frac{1}{6}|}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6})}}\right)\right) = 2(1 - \phi\,(2.83)) = 2(1 - 0.9977) = 0.0046\,.$$

Kako je $\alpha^* < \alpha$, odbacujemo nultu hipotezu. Zaključujemo da je kocka neispravna.
II način: Testiramo nultu hipotezu $H_0(p_0 = \frac{1}{6})$. Napravićemo interval poverenja za nepoznatu proporciju, sa nivoom poverenja $\beta = 1 - \alpha = 1 - 0.01 = 0.99$ i ustanoviti da li se pretpostavljena vrednost $p_0 = \frac{1}{6} = 0.167$ u njemu nalazi. Iz datih podataka zaključujemo da je $n = 1000$, $k = 200$, $\bar{p} = \frac{200}{1000} = 0.2$, $\bar{q} = 1 - 0.2 = 0.8$ i $a = \phi^{-1}\,(0.995) = 2.576$, pa je

$$I = \left(0.2 - 2.576 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{999}}, 0.2 + 2.576 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{999}}\right) = (0.168, 0.232).$$

Pošto $p_0 \notin (0.168, 0.232)$, hipotezu ne prihvatamo sa ovim pragom značajnosti.

Napomena. Kada je pretpostavljena vrednost blizu granice prihvatanja tj. kada je α^* blisko vrednosti α, promena praga značajnosti bi mogla promeniti zaključak. Međutim, smanjenjem verovatnoće greške I vrste dolazi do povećanja verovatnoće **greške II vrste**, koju činimo ako prihvatimo nultu hipotezu a ona je u stvari netačna. Verovatnoća greške druge vrste se samo za neke testove može izračunati. Zbog toga se u praksi retko uzima prag značajnosti manji od 0.01.
Optimalno rešenje u ovakvim situacijama je ponavljanje ispitivanja, sa povećanjem obima uzorka.

---

[173] *Prema ranijim ispitivanjima, 15% zaposlenih u bankama smatra svoj posao visoko stresnim. Od 120 slučajno odabranih radnika banke X, 44 njih smatra svoj posao visoko stresnim. Testirati da li procenat prisutnosti stresa u banci X odgovara prosečnom procentu u bankama, sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$.

Rešenje: Testiramo nultu hipotezu $H(p_0 = 0.15)$ pomoću 95%-og intervala poverenja za proporciju. Realizovana proporcija je $\bar{p} = \frac{44}{120} = 0.37$, $\bar{q} = 0.63$, $n = 120$ i $a = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$.

$$I = \left(0.37 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.37 \cdot 0.63}{119}}, 0.37 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.37 \cdot 0.63}{119}}\right) = (0.283, 0.457).$$

Pošto $p_0 \notin (0.283, 0.457)$, hipotezu ne prihvatamo sa pragom značajnosti 0.05 tj. zaključujemo da nivo stresa u banci X ne odgovara proseku.

---

[174] *Za ocene na pismenom ispitu u slučajnom uzorku đaka petih razreda iz zadatka broj* [165] *testirati hipotezu da je srednja ocena na pismenom ispitu jednaka* $m_0 = 3.50$ *sa pragom značajnosti*

(a) $\alpha = 0.05$ *(b)* $\alpha = 0.01$

(Sa poznatim standardnim odstupanjem ocena na pismenom $\sigma = 1.4$.*)*

Rešenje: Testiranje nulte hipoteze $H_0(m = m_0)$ se može svesti na jednostavnu proveru da li data vrednost m_0 upada u interval poverenja širine $\beta = 1 - \alpha$. Kako smo u zadatku [165] pronašli interval poverenja za $\beta = 0.95$: $I = (2.3385, 3.3757)$, i kako naša vrednost 3.50 ne upada u njega, zaključujemo da se nulta hipoteza pod (a) odbacuje.

Rešimo zadatak pod (b) pomoću testa značajnosti. Naime, kad se α smanji na 0.01, to je ekvivalentno sa tim da se β poveća na 0.99, odnosno, da se interval poverenja proširi. Verovatnoću α^* moramo izračunati, jer se interval poverenja proširio pa možda zadata vrednost upadne u njega.

$$\alpha^* = \mathsf{P}\left(|\bar{X}_n - m_0| \geq |\bar{x}_n - m_0|\right) = \mathsf{P}\left(\left|\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| \geq \left|\frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right|\right)$$

Upotrebićemo podatke $n = 30$ i $\bar{x}_n = 2.8$ iz zadatka [165]

$$\alpha^* = 2\left(1 - \phi\left(\frac{|\bar{x}_n - m_0|}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right) = 2(1 - \phi(2.74)) = 2(1 - 0.9969) = 0.00614\,.$$

Kako je $\alpha^* < \alpha$, i pod (b) odbacujemo nultu hipotezu, odnosno, zaključujemo da srednja vrednost nije jednaka 3.50.

Napomena. Da smo prvo rešili pod (b), automatski bi imali da se nulta hipoteza pod (a) odbacuje, jer je pod (a) veći prag značajnosti nego pod (b).

---

[175] *Poznato je da standardna vrednost visine krvnog pritiska kod zdravih osoba iznosi* $m_0 = 115\,mmHg$. *Za podatke iz zadatka* [164] *testirati da li je srednja vrednost krvnog pritiska zdravih regruta jednaka standardnoj sa pragom značajnosti* 5%.

Rešenje: Testiramo nultu hipotezu $H_0(m = 115)$. Ne možemo iskoristiti interval poverenja dobijen u zadatku [164] zbog promenjenog nivoa poverenja (sada je $\beta = 1-0.05 = 0.95$). Ostale podatke, međutim, možemo iskoristiti: $n = 26$, $\bar{x}_n = 120.154$ i $\bar{s}_n = 8.3006$. Obim uzorka je manji od 30, pa vrednost a nalazimo iz tablice Studentove raspodele. Za zadati nivo poverenja $\beta = 0.95$, $a = t_{26-1,\frac{1+0.95}{2}} = t_{25,0.975} = 2.06$.

Traženi interval poverenja za prosečni krvni pritisak zdravih regruta je

$$I = (120.154 - 2.06 \cdot \frac{8.3006}{\sqrt{25}}, 120.154 + 2.06 \cdot \frac{8.3006}{\sqrt{25}}) = (116.734, 123.574).$$

Pošto $115 \notin (116.734, 123.574)$, hipotezu odbacujemo sa pragom značajnosti 0.05 i zaključujemo da srednja vrednost pritiska zdravih regruta nije jednaka srednjoj visini pritiska zdravih osoba.

---

[176] *Dati su podaci anketiranih putnika GSP-a o tome koliko dugo su čekali autobus:*

vreme čekanja [min]	*[0,3)*	*[3,4)*	*[4,5)*	*[5,6)*	*[6,7)*	*[7,9)*	*[9,17]*
broj putnika	*20*	*15*	*12*	*8*	*5*	*6*	*9*

Testirati hipotezu da je srednja vrednost čekanja jednaka 5 minuta i 45 sekundi, sa pragom značajnosti

(a) $\alpha = 0.05$ *(b)* $\alpha = 0.10$.

Rešenje: **I način**: Napravićemo odgovarajuće intervale poverenja, sa nivoima poverenja 95% i 90%, i ustanoviti da li se pretpostavljena vrednost $m_0 = 5min\;45s = 5.75min$ nalazi u nekom od njih. Iz intervalno datog uzorka računamo potrebne veličine:

$$n = \sum f_i = 75, \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum x_i f_i = (1.5 \cdot 20 + \cdots + 13.0 \cdot 9)/75 = 5.04,$$

$$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 f_i - \bar{x}_n^2 = (1.5^2 \cdot 20 + \cdots + 13.0^2 \cdot 9)/75 - 5.04^2 = 12.3317, \quad \bar{s}_n = 3.512.$$

Pošto je obim uzorka veći od 30, tablične vrednosti čitamo iz tablice normalne raspodele: $a_{95\%} = 1.96$ i $a_{90\%} = 1.64$.

$$I_{95\%} = (5.04 - 1.96\frac{3.512}{\sqrt{74}}, 5.04 + 1.96\frac{3.512}{\sqrt{74}}) = (4.24, 5.84),$$

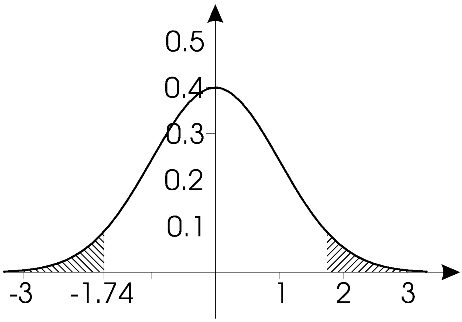
$$I_{90\%} = (5.04 - 1.64\frac{3.512}{\sqrt{74}}, 5.04 + 1.64\frac{3.512}{\sqrt{74}}) = (4.37, 5.71).$$

Zaključujemo da pod (a) hipotezu $H(m_0 = 5.75)$ možemo prihvatiti sa pragom značajnosti 0.05 jer $5.75 \in I_{95\%}$, ali da je, pod (b), ne možemo prihvatiti sa pragom značajnosti 0.10, zato što $5.75 \notin I_{90\%}$. Budući da se zaključak menja u zavisnosti od nivoa značajnosti, on nije pouzdan i preporučuje se ponovno ispitivanje, po mogućnosti sa većim brojem ispitanika.

II način: Predstavićemo posmatrane intervale aritmetičkim sredinama leve i desne granice.

x_i	1.5	3.5	4.5	5.5	6.5	8.0	13.0
f_i	20	15	12	8	5	6	9

Obeležje „dužina čekanja autobusa" možda i nema normalnu raspodelu, ali, na osnovu centralne granične teoreme, možemo na srednju vrednost posmatranog obeležja primeniti testiranje hipoteze o matematičkom očekivanju m normalne raspodele kad σ nije poznato. Dakle, koristićemo slučajnu promenljivu sa Studentovom t_{n-1} raspodelom $Z = \frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}$. Potrebna deskriptivno statistička obeležja uzorka $n = 75$, $\bar{x}_n = 5.04$ i $\bar{s}_n = 3.51166$ su izračunata u prvom načinu rešavanja zadatka.



Pretvorimo 5 minuta i 45 sekundi u 5.75 minuta. Ako je nulta hipoteza tačna, za realizovanu vrednost Studentove statistike dobijamo

$$z = \frac{5.04 - 5.75}{3.51166}\sqrt{74} = -1.74\,.$$

Verovatnoća α^* odstupanja srednje vrednosti od zadate $m_0 = 5.75$ koja se računa po formuli

$$\alpha^* = \mathsf{P}\left(\left|\frac{\bar{X}_n - m_0}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}\right| \geq \left|\frac{\bar{x}_n - m_0}{\bar{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right)$$

predstavlja na slici šrafiranu oblast. Ali, nju nije lako odrediti pomoću tablica kojima raspolažemo. Umesto toga, mi ćemo uporediti da li je ta verovatnoća manja ili veća od datog praga značajnosti.

Iz tablica sa kraja knjige možemo očitati vrednosti broja a takvog da je površina ispod krive gustine Studentove raspodele od $-\infty$ do a jednaka zadatoj verovatnoći.

Pod (a) ćemo naći a za verovatnoću $1 - \alpha/2 = 0.975$. Pošto $n = 75$ nema u tablicama, uzimamo a za najbližu vrednost $n = 60$. Očitavamo $a = 2.000$. Kako je taj broj veći od apsolutne vrednosti $|z| = 1.74$, to je ekvivalentno sa tim da je $\alpha^* > \alpha$, odnosno, da se nulta hipoteza ne odbacuje.

Pod (b) dobijamo za $1 - \alpha/2 = 1 - 0.10/2 = 0.95$ (i najbliže $n = 60$) $a = 1.671$. Pošto je $|z| = 1.74 > a = 1.671$, odbacujemo nultu hipotezu.

Da bismo lakše pamtili, napravićemo tabelu.

$\lvert z\rvert < a$	$\alpha^* > \alpha$	H_0 se ne odbacuje
$\lvert z\rvert > a$	$\alpha^* < \alpha$	H_0 se odbacuje

Broj a se čita iz tablice tako da je integral (površina) gustine Studentove raspodele od $-\infty$ do a jednaka $1 - \alpha/2$ (za jednostrani test), odnosno jednaka $1 - \alpha$ (za dvostrani test) gde je α je zadati prag značajnosti.

[177] *Fabrika deterdženata je otvorila novu liniju za pakovanje. Nova linija je izrađena po tehnologiji za koju se tvrdi da ima disperziju mase deterdženta u pakovanju istu kao i prethodna linija tj.* $\sigma_0^2 = 55.8$. *Iz slučajno odabranog uzorka* $n = 30$ *pakovanja je izračunata uzoračka disperzija i utvrđeno je da ona iznosi* $\bar{s}_n^2 = 65.2$. *Testirati datu tvrdnju sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.1$.

Rešenje: Nulta hipoteza glasi $H_0(\sigma^2 = \sigma_0^2)$ i testiraćemo je pomoću jednostranog intervala poverenja za nepoznatu disperziju.
Poznato je da je $n = 30$, $\bar{s}_n^2 = 65.2$. Za zadati prag značajnosti $\alpha = 0.1$, odgovarajući nivo poverenja je $\beta = 1 - \alpha = 0.9$, pa je vrednost c iz tablice Pirsonove raspodele $c = \chi^2_{n-1,\beta} = \chi^2_{29,0.9} = 39.1$. Jednostrani interval poverenja je:

$$I = \left(0, \frac{n\bar{s}_n^2}{c}\right) = \left(0, \frac{29 \times 65.2}{39.1}\right) = (0, 48.36).$$

Pošto $\sigma_0^2 = 55.8 \notin (0, 48.36)$, hipotezu o pretpostavljenoj vrednosti disperzije odbacujemo sa pragom značajnosti 0.1.

Napomena: U ovom slučaju, disperzija nove linije je statistički značajno manja od disperzije prethodne, što je po pravilu dobra osobina.

---

[178] *U dve smene jednog industrijskog pogona je tokom 10 radnih dana praćen učinak (izražen brojem proizvedenih artikala) i rezultati su prikazani u sledećoj tabeli:*

I smena	*43*	*41*	*40*	*45*	*39*	*44*	*42*	*46*	*44*	*45*
II smena	*40*	*37*	*40*	*42*	*41*	*39*	*41*	*38*	*40*	*39*

može li se sa pragom značajnosti 0.05 smatrati da se učinak smena razlikuje?

Rešenje: Ovaj zadatak se odnosi na testiranje jednakosti parametara raspodele kod dva uzorka. U ovom slučaju učinak je izražen brojem proizvedenih artikala, pa ćemo zato testirati da li postoji razlika među prosečnim vrednostima tog obeležja. Nulta hipoteza se, bez obzira na cilj testiranja, uvek postavlja u formi jednakosti, dakle $H_0(m_1 = m_2)$.
Iz prostog uzorka računamo sledeće numeričke karakteristike: obimi uzoraka su $n_1 = n_2 = 10$, aritmetičke sredine su $\bar{x}_1 = 42.9$, $\bar{x}_2 = 39.7$, a uzoračke disperzije iznose $\bar{s}_1^2 = 4.89$, $\bar{s}_2^2 = 2.01$.
Pošto je zbir obima manji od 30 računamo realizovanu vrednost test-statistike T_0:

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\bar{s}_1^2 + (n_2-1)\bar{s}_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} = \frac{42.9 - 39.7}{\sqrt{\frac{9 \cdot 4.89 + 9 \cdot 2.01}{18} \cdot \frac{20}{100}}} = 4.64.$$

Ovu vrednost upoređujemo sa tabličnom vrednošću iz tablice Studentove raspodele, koja za zadati prag značajnosti $\alpha = 0.05$ iznosi $t_{10+10-2;\frac{1+0.95}{2}} = t_{18;0.975} = 2.101$. Vidimo da $4.64 \notin (-2.101, 2.101)$, pa hipotezu H_0 odbacujemo tj. sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da se učinak smena razlikuje.

---

[179] *U fabrici iz prethodnog zadatka je testirana i preciznost rada u dve smene. U I smeni je provereno 150 slučajno odabranih proizvoda i utvrđena je neispravnost kod 5. U II smeni je provereno 90 slučajno odabranih proizvoda i pronađena su 2 neispravna. Proveriti sa pragom značajnosti 0.01 da li obe smene rade istom preciznošću.*

Rešenje: Zadatak ćemo rešiti tako što ćemo proveriti da li je proporcija neispravnih proizvoda jednaka u obe smene, stoga će nulta hipoteza glasiti $H_0(p_1 = p_2)$.
U prvoj smeni, obim uzorka je $n_1 = 150$ i bilo je 5 uspešnih realizacija provere neispravnosti, pa je u ovoj smeni uzoračka proporcija $\bar{p}_1 = 5/150 = 0.033$. Analogno, uzoračka proporcija u drugoj smeni je $\bar{p}_2 = 2/90 = 0.022$. Test statistika zahteva i računanje zajedničke proporcije $p = \frac{5+2}{150+90} = 0.029$ i vrednosti $q = 1 - 0.029 = 0.971$. Sada možemo izračunati realizovanu vrednost:

$$z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0.033 - 0.022}{\sqrt{0.029 \cdot 0.971(\frac{1}{150} + \frac{1}{90})}} = 0.49.$$

Tablična vrednost $a = \phi^{-1}(0.995) = 2.576$. $0.49 \in (-2.576, 2.576)$ pa hipotezu H_0 prihvatamo sa pragom značajnosti 0.01 i zaključujemo da ne postoji statistički značajna razlika u preciznosti rada između dve smene.

---

[180] *Učenici 2 odeljenja su ostvarili sledeći opšti uspeh na kraju školske godine:*

I odeljenje

uspeh	*[1,2.5)*	*[2.5,3.5)*	*[3.5,4.5)*	*[4.5, 5]*
broj đaka	5	8	6	10

II odeljenje

uspeh	*[1,2.5)*	*[2.5,3.5)*	*[3.5,4.5)*	*[4.5, 5]*
broj đaka	2	12	10	3

(a) *Sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ testirati hipotezu da se srednje ocene u ova dva razreda ne razlikuju.*

(b) *Sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ testirati hipotezu da se procenat "odlikaša"u ova dva razreda razlikuje.*

Rešenje: U delu zadatka pod (a) testiramo hipotezu o jednakosti srednjih vrednosti posmatranog obeležja, pa je nulta hipoteza $H_0(m_1 = m_2)$.
Iz intervalno datog uzorka računamo numeričke karakteristike koje su potrebne za računanje test-statistike. Obimi uzoraka su $n_1 = 29$, $n_2 = 27$, aritmetičke sredine su $\bar{x}_1 = \frac{1}{29}(1.75\cdot5+3\cdot8+4\cdot6+4.75\cdot10) = 3.59$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{27}(1.75\cdot2+3\cdot12+4\cdot10+4.75\cdot3) = 3.47$, a uzoračke disperzije iznose $\bar{s}_1^2 = \frac{1}{29}(1.75^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 8 + 4^2 \cdot 6 + 4.75^2 \cdot 10) - 3.59^2 = 1.21$ i $\bar{s}_2^2 = \frac{1}{27}(1.75^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 12 + 4^2 \cdot 10 + 4.75^2 \cdot 3) - 3.47^2 = 0.62$.
Pošto je zbir obima $29 + 27 = 56$ veći od 30 računamo realizovanu vrednost test-statistike Z_0:

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2}{n_1} + \frac{\bar{s}_2^2}{n_2}}} = \frac{3.59 - 3.47}{\sqrt{\frac{1.21}{29} + \frac{0.62}{27}}} = 0.48.$$

Tablična vrednost iz tablice Gausove raspodele iznosi $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Vidimo da $0.48 \in (-1.96, 1.96)$, pa hipotezu H_0 ne odbacujemo tj. sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da se prosečne ocene posmatranih odeljenja ne razlikuju statistički značajno.

Iako je cilj dela zadatka pod (b) da testira postojanje razlike u proporciji učenika sa odličnim uspehom među odeljenjima, nulta hipoteza je $H_0(p_1 = p_2)$, a alternativna je $H_1(p_1 \neq p_2)$.
U prvom odeljenju, obim uzorka je $n_1 = 29$ i bilo je 10 uspešnih realizacija (tj. odlikaša), pa je u ovom odeljenju uzoračka proporcija $\bar{p}_1 = 10/29 = 0.345$. Analogno, uzoračka proporcija u drugom odeljenju je $\bar{p}_2 = 3/27 = 0.111$. Zajednička proporcija je $p = \frac{10+3}{29+27} = 0.232$ a $q = 1 - 0.232 = 0.768$.
Realizovana vrednost statistike Z_0 je:

$$z_0 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0.345 - 0.111}{\sqrt{0.232 \cdot 0.768(\frac{1}{29} + \frac{1}{27})}} = 2.07.$$

Tablična vrednost za dati prag značajnosti je $a = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Pošto $2.07 \notin (-1.96, 1.96)$ hipotezu H_0 odbacujemo sa pragom značajnosti 0.05 i prihvatamo hipotezu H_1 tj. zaključujemo da se odeljenja statistički značajno razlikuju po proporciji odličnih učenika.

---

[181] *Ispitivanje iz Zadatka* [176] *o vremenu čekanja autobusa je ponovljeno. U novom ispitivanju, anketirano je ukupno 120 putnika GSP-a. Utvrđeno je da je prosečno vreme čekanja 4.52 minuta, sa disperzijom od 10.67 minuta. Pritom, 42 ispitanika su čekala autobus bar 5 minuta. Sa pragom značajnosti 0.05 proveriti da li se kod ovog i prethodnog ispitivanja*

(a) razlikuje prosečno vreme čekanja autobusa;

(b) razlikuje proporcija putnika koji su čekali autobus bar 5 minuta.

Rešenje: (a) Nulta hipoteza je $H_0(m_1 = m_2)$.
U zadatku [176] su izračunate relevantne vrednosti za prvo ispitivanje: $n_1 = 75$, $\bar{x}_1 = 5.04$ i $\bar{s}_1^2 = 12.33$. Dati podaci za drugo ispitivanje su: $n_2 = 120$, $\bar{x}_2 = 4.52$ i $\bar{s}_2^2 = 10.67$. Ukupan obim uzoraka $75 + 120 = 195$ je veći od 30, tako da koristimo sledeću statistiku:

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2}{n_1} + \frac{\bar{s}_2^2}{n_2}}} = \frac{5.04 - 4.52}{\sqrt{\frac{12.33}{75} + \frac{10.67}{120}}} = 1.03.$$

Odgovarajuća tablična vrednost iznosi $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Izračunata vrednost $1.03 \in (-1.96, 1.96)$, pa hipotezu H_0 ne odbacujemo tj. sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da se prosečna vremena čekanja autobusa u dva ispitivanja ne razlikuju statistički značajno.
(b) U ovom slučaju je nulta hipoteza $H_0(p_1 = p_2)$.
Iz tabele iz zadatka [176] možemo videti da je broj ispitanika koji su čekali 5 ili više minuta $k_1 = 8 + 5 + 6 + 9 = 28$, pa za prvo ispitivanje uzoračka proporcija ima vrednost $\bar{p}_1 = 28/75 = 0.373$. Kod ponovljenog ispitivanja, uzoračka proporcija je $\bar{p}_2 = 42/120 = 0.35$. Zajednička proporcija je $p = \frac{28+42}{75+120} = 0.359$ pa je $q = 1 - 0.359 = 0.641$.
Realizovana vrednost statistike Z_0 iznosi:

$$z_0 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0.373 - 0.35}{\sqrt{0.359 \cdot 0.641(\frac{1}{75} + \frac{1}{120})}} = 0.32.$$

Tablična vrednost za dati prag značajnosti je $a = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Pošto $0.32 \in (-1.96, 1.96)$ hipotezu H_0 prihvatamo sa pragom značajnosti 0.05 i zaključujemo da se proporcija putnika koji su čekali autobus bar 5 minuta ne razlikuje statistički značajno između dva ispitivanja.

---

[182] *Proizvođač lekova tvrdi da novi lek pomaže u barem 80% slučajeva. U slučajnom uzorku od 80 bolesnika poboljšanje je osetilo 56. Testirati tvrdnju proizvođača sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$.

Rešenje: Realizovana proporcija izlečenih je $\frac{k}{n} = \frac{56}{80} = 0.70 = 70\%$. Tvrdnja proizvođača ne bi ni bila dovedena u pitanje da je bilo više od 80% izlečenih. Tako da ćemo sad testirati hipotezu $H_0(p = p_0)$ protiv alternativne $H_1(p < p_0)$. To je takozvani jednostrani test. Ako je H_0 tačna, onda je verovatnoća da je odstupanje od zadate proporcije veće od realizovane vrednosti odstupanja

$$\mathsf{P}\left(p_0 - \frac{K}{n} \geq p_0 - \frac{k}{n}\right) = \mathsf{P}\left(\frac{K}{n} - p_0 \leq \frac{k}{n} - p_0\right) =$$

(Množimo sa $\sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}}$.)

$$= \mathsf{P}\left(\frac{K - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leq \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = \alpha^* .$$

Izračunajmo α^* približno pomoću Moavr-Laplasove teoreme

$$\alpha^* \approx \phi\left(\frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = \phi\left(\frac{56 - 80 \times 0.80}{\sqrt{80 \times 0.80 \times (1 - 0.80)}}\right) = \phi(-2.23607) .$$

U tablicama normalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele očitavamo $\alpha^* \approx \phi(-2.24) = 1 - \phi(2.24) = 1 - 0.9875 = 0.0125$.

Kako je $\alpha^* < \alpha$, odbacujemo nultu hipotezu. Proizvođač nije u pravu. Napomenimo da nultu hipotezu ne bismo mogli odbaciti da je prag značajnosti bio $\alpha = 0.01$.

Razlog upotrebe Moavr-Laplasove teoreme za računanje tražene verovatnoće je u problemima sa računanjem verovatnoće u binomnoj raspodeli. Naime, za veliko n teško je izračunati binomne koeficijente. Ako se, pak, mogu izračunati veći binomni koeficijenti, tražena verovatnoća se može i direktno izračunati.

Direktnom primenom binomnih koeficijenata, odnosno, definicije verovatnoće u binomnoj raspodeli dobijamo

$$\mathsf{P}\left(p_0 - \frac{K}{n} \geq p_0 - \frac{k}{n}\right) = 1 - \mathsf{P}(K > k) = 1 - \sum_{m=k+1}^{n} \binom{n}{m} p_0^m (1-p_0)^{n-m}$$

Poslednju verovatnoću možemo izračunati na kompjuteru pomoću programa koji koristi algebru dvostruke preciznosti. Dobijamo

$$\alpha^* = 1 - \binom{80}{57} 0.8^{57} 0.2^{23} - \binom{80}{58} 0.8^{58} 0.2^{22} - \cdots - 0.8^{80} = 0.0217\,.$$

Vidimo da je dobijena verovatnoća različita od one dobijene pomoću Moavr-Laplasove teoreme, ali je rezultat isti: nulta hipoteze se odbacuje, jer je i dalje $\alpha^* = 0.0217 < 0.05 = \alpha$.

---

[183] *Poznato je da je masa dečaka od deset godina starosti raspoređena po normalnoj raspodeli sa srednjom vrednošću $m_0 = 37kg$ i standardnim odstupanjem $\sigma = 10kg$. U jednoj školi je merena masa $n = 36$ dečaka i dobijena je aritmetička sredina mase $\bar{x}_n = 40kg$. Testirati hipotezu da posmatrana deca imaju masu veću od srednje vrednosti m_0, sa pragom značajnosti $\alpha = 0.01$.*

Rešenje: Nulta hipoteza $H_0(m = m_0)$ protiv alternativne hipoteze $H_1(m > m_0)$.

Ovo je jednostrani test. Interesuje nas verovatnoća

$$\begin{aligned}
\alpha^* &= \mathsf{P}\left(\bar{X}_n - m_0 \geq \bar{x}_n - m_0\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \\
&= 1 - \phi\left(\frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\,.
\end{aligned}$$

Kad uvrstimo naše podatke i iz tablice za normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu očitamo vrednost Laplasove funkcije ϕ, dobijamo

$$\alpha^* = 1 - \phi\left(\frac{40-37}{10}\sqrt{36}\right) = 1 - \phi\,(1.8) = 1 - 0.9641 = 0.0359\,.$$

Kako je dobijena verovatnoća veća od praga značajnosti, ne odbacujemo nultu hipotezu da masa dece odgovara standardu.

Napomena. Da je prag značajnosti bio $\alpha = 0.05$, odnosno, da smo imali dozvolu da grešimo pri konstataciji povećane mase u do 5% slučajeva, odbacili bismo nultu hipotezu i zaključili da deca imaju masu veću od srednje vrednosti.
